XXI Krajowa Konferencja SNM

AKTYWNOŚCI MATEMATYCZNE

Agata Hoffmann (Wrocław)

Jak to zrobić?

Streszczenie. Na warsztatach zaprezentowałam trzy propozycje prowadzenia lekcji, które szczególnie mocno wykorzystują prace uczniów opartą na słowie pisanym. Ten typ metod pracy jest dość często przez nauczycieli wykorzystywany, ale poprzez moje propozycje, chciałabym odejść od tradycyjnej pracy z ćwiczeniami czy podręcznikiem i pokazać trochę inne podejście.

Przygotowanie lekcji matematyki nie jest łatwe. Szczególnie mocno doświadczają tego początkujący adepci zawodu nauczycielskiego. Stojący z boku, często drwią sobie z ich pracy – *cóż to za problem wyłożyć dane zagadnienie, a potem ćwiczyć poznaną wiedzę*! Nie bez przyczyny jednak mówi się: *Obyś cudze dzieci uczył!* Jest to naprawdę nie lada wyzwanie. Tym bardziej, jeśli mamy ambicję robić to dobrze i interesująco.

Oczywiście, najpierw musimy **jasno sformułować cel**, który chcemy osiągnąć – to jest podstawa. I tu, korzystając z doświadczenia mogę powiedzieć, że tak modny obecnie operacyjny sposób formułowania celów, wbrew pozorom, wcale studentom nie pomaga w uświadomieniu sobie tego, co chcą osiągnąć. „Stare", klasyczne podejście sprawdza się bardziej. Poprzez podział na cele poznawcze i kształcące, pozwala studentom lepiej uświadomić sobie to, co jest nowe dla uczniów i z czym chcą ich zapoznać, co muszą przypomnieć, by to, co nowe, mogło być zrozumiałe oraz to, co koniecznie trzeba poćwiczyć, by to, co zostało poznane, nie uleciało.

Po uświadomieniu sobie celu, przychodzi czas na „opakowanie" naszego produktu, czyli na ustalenie metod, jakimi chcemy dany cel osiągnąć oraz form, które chcemy przy tym wykorzystać. W literaturze możemy znaleźć wiele sposobów opisywania metod i form pracy. Najczęściej są one „wkładane do jednego worka". To, niestety, również nie pomaga studentom w ich pracy. Na moich zajęciach wyraźnie rozgraniczam te zagadnienia – **metody,** opisują sposoby pracy w zależności od **używanych środków i zmysłów, które głównie angażujemy**, a **formy** opisują sposoby pracy w zależności od **typu organizacji pracy na lekcji**.

I tak, rozróżniamy trzy rodzaje form pracy: indywidualna (gdy każde dziecko ma swoje zadanie i czas na jego wykonanie), w grupach (gdy cały zespół klasowy dzielimy na mniejsze części – co najmniej pary – i każda z nich ma swoje zadanie i czas na jego wykonanie) oraz „wspólnym frontem" – choć to stare określenie, to bardzo dobrze opisuje ideę tej formy organizacyjnej (gdy pracujemy równocześnie z całym zespołem klasowym).

Gdy ustalamy metodę pracy, to koncentrujemy się na sposobie przekazu. Może on być głównie oparty na słowie (mówionym – np. pogadanka lub pisanym – np. praca z ćwiczeniami), obrazie – np. pokaz lub działaniu – np. budowanie modelu.

Na końcu musimy dopracować odpowiednie środki dydaktyczne, które zamierzony cel, w ustalonej formie, zaplanowaną metodą pozwolą nam osiągnąć.

Na warsztatach przedstawiłam trzy propozycje.

Pierwsza z moich propozycji dotyczyła szkoły podstawowej. Wybrałam temat z zakresu działań na ułamkach.

Cel – zapoznanie uczniów ze sposobem obliczania części z ułamka.

Metoda – praca z materiałami przygotowanymi przez nauczyciela.

Forma – praca w grupach (parach) lub indywidualna (w zależności od możliwości uczniów).

Środki – opis A, wycięte prostokąty z odpowiednimi podziałami, tabela i polecenia przygotowujące do uogólnienia B.

Podziały, podziały …

A Załączone rysunki uporządkuj tak, by ilustrowały poniższy opis.

1. Chcę się dowiedzieć: *ile to* z ?
2. Całość przedstawiam w postaci prostokąta.
3. Prostokąt dzielę na 5 równych części.
4. Z całości wybieram .
5. Wybraną część całości dzielę na 7 równych części.
6. Z otrzymanych części wybieram dwie.
7. W wyniku przeprowadzonych podziałów, wybrana część została podzielona na kwadraty. Aby zobaczyć, jaką częścią całości jest jeden powstały kwadrat, „rozciągam” podział na całość.

8. Teraz widzę, że z to . Zapisuję wynik w tabeli.

Podziały, podziały …

B To samo, co zostało zrobione w A, zrób dla poniższych przykładów.

Wyniki (zgodnie z podanym wzorem) zapisz w tabeli.

1. Ile to jest : z ? (Całość jako prostokąt 4 cm na 7 cm może pomóc!)

2. Ile to jest z ? (Całość jako prostokąt 3 cm na 5 cm może pomóc!)

3. Ile to jest z ? (Całość jako prostokąt 8 cm na 10 cm może pomóc!)

4. Ile to jest z ? (Całość jako prostokąt 6 cm na 9 cm może pomóc!)

Czy coś zauważasz? Spróbuj wypełnić ostatni wiersz w tabeli. Sformułuj hipotezę.

Podziały, podziały …

Tabela

Przypomnienie:

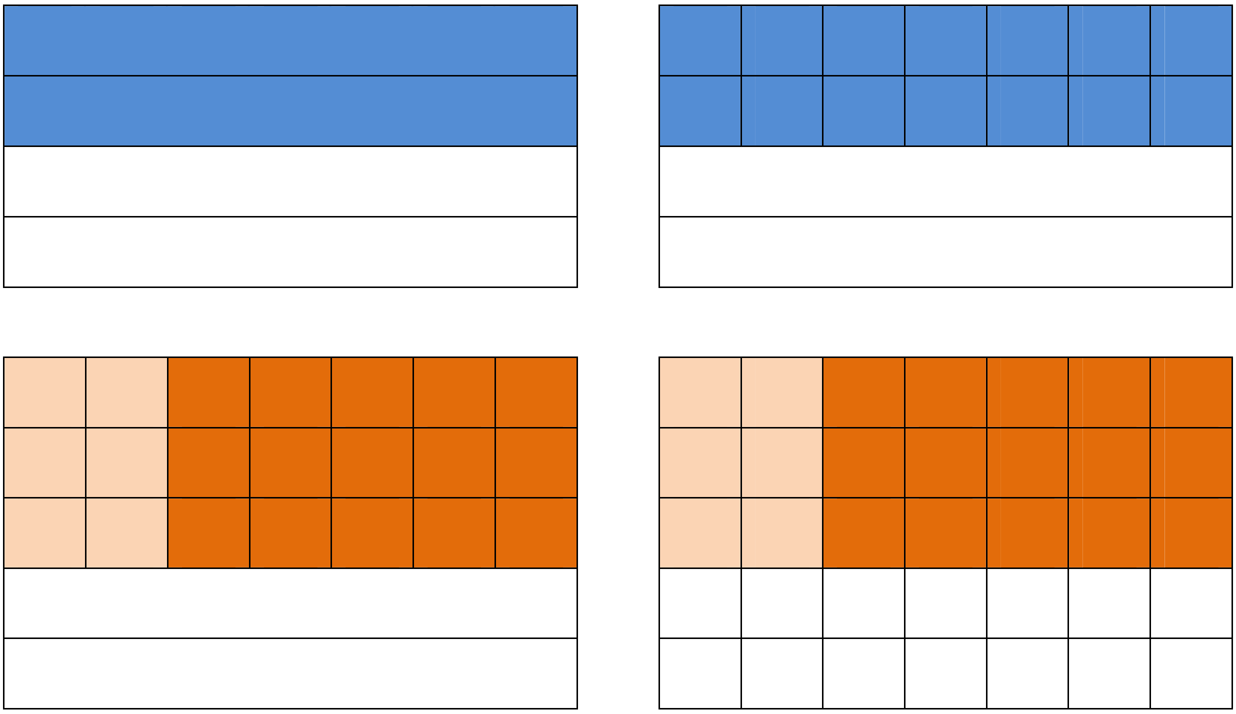
Aby obliczyć określony ułamek z danej liczby, mnożymy ten ułamek przez daną liczbę.

np. ¾ ze 100, to (¾) · 100 = 75.

A	z to czyli · =
B1	z to
B 2	z to
B 3	

	z to

B 4	z to
C	$\frac{a}{b}$ z $\frac{c}{d}$ to gdzie ***a, b, c, d*** to liczby naturalne, a ***b, d*** dodatkowo są różne od zera



Jak widać (z załączonych materiałów), najpierw daję uczniom opis tego, co ja robiłam, by udzielić odpowiedzi na postawione pytanie (część A). Uczniowie mają się z nią zapoznać. By ich praca nie była tylko bierna (samo czytanie), wspomagam rozumienie czytanego tekstu, działaniem uczniów (porządkowanie ilustracji opisu). Otrzymany wynik zapisałam w dołączonej tabeli i to stanowi wzór do zapisu rozwiązań kolejnych przypadków. W części B daję uczniom możliwość „przetestowania" kolejnych przypadków. Uczniowie dysponują wzorem tego, jak zająć się danym przypadkiem (część A), jak otrzymane informacje zapisać (tabela) oraz listą kolejnych przypadków z sugestią użycia materiałów pomocniczych, które jednak już trzeba wykonać samodzielnie oraz sugestią znalezienia uogólnienia (część B).

Rozważane przykłady są tak dobrane, by najpierw mianowniki były względnie pierwsze, ale by nie tylko były parami liczb pierwszych – również pierwszej i złożonej. Później mianowniki nie są już liczbami względnie pierwszymi. Tak samo dobierałam liczniki. Tylko w ostatnim przypadku dopuściłam możliwość zauważenia dokonania skrócenia. Nie jest moją intencją, by przy tej okazji już zapoznawać uczniów z tą sytuacją, ale zostawiam sobie możliwość odwołania się do tej sytuacji później.

Na przykładzie tu przedstawionych materiałów, chciałam pokazać, że można wprowadzać nowy materiał (i to z podstaw programowych) tak, by pozwolić uczniom stawać się odkrywcami! Przy okazji ćwiczymy u uczniów umiejętność pracy z tekstem – realizując wybrane cele ogólne podstawy programowej: „*uczeń interpretuje i przetwarza informacje tekstowe*" (II), „*dobiera odpowiedni model matematyczny do prostej sytuacji, stosuje poznane wzory i zależności*" (III) oraz „*prowadzi proste rozumowanie składające się z niewielkiej liczby kroków, ustala kolejność czynność(w tym obliczeń) prowadzących do rozwiązania problemu, potrafi wyciągnąć wnioski z kilku informacji podanych w różnej postaci*" (IV).

Oczywiście, zdaję sobie sprawę z tego, że zaproponowany sposób jest trudniejszy i bardziej czasochłonny niż zrealizowanie tego samego metodą pogadanki, co więcej, że by zakończyć realizację tego tematu potrzebne są prezentacje uczniów oraz wspólne ich podsumowujące omówienie, ale chyba warto!

Druga propozycja dotyczyła gimnazjum. Wybrałam temat z zakresu wyrażeń algebraicznych.

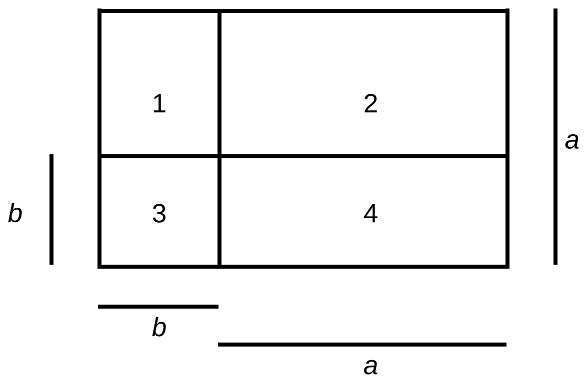
Cel – zapoznanie uczniów ze sposobem odkrycia własności algebraicznej, korzystając z wiadomości geometrycznych.

Metoda – praca z materiałami przygotowanymi przez nauczyciela.

Forma – praca w grupach (parach) lub indywidualna (w zależności od możliwości uczniów).

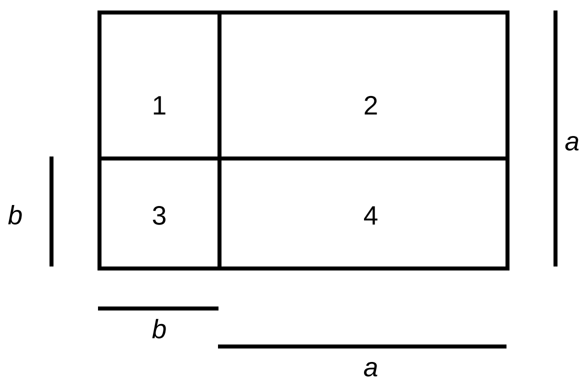
Środki – przygotowany tekst z rysunkami.

Figury i ich pola

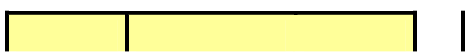


Na rysunku obok przedstawiony jest duży prostokąt (oznaczmy go D). Został on podzielony na cztery mniejsze prostokąty (oznaczone 1,2,3,4). Odczytaj i zapisz wymiary tych prostokątów (użyj *a* i *b*).

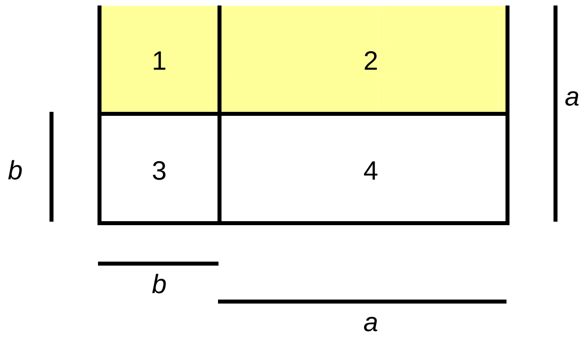
1
2
3
4
D



Oblicz pola prostokątów 1 i 2 (oznacz je odpowiednio P_1 i P_2).

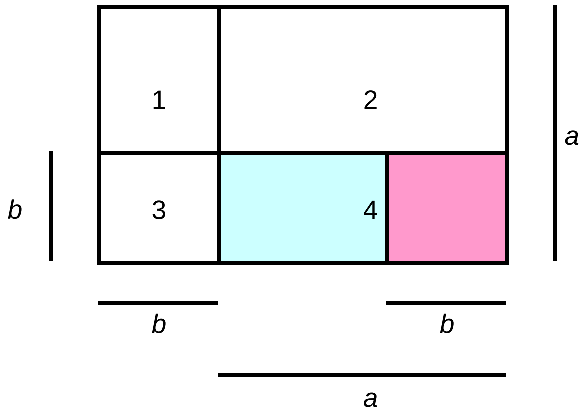


Prostokąty 1 i 2 tworzą pewną figurę (żółtą).



Co to za figura? **(*)** Oblicz jej pole (oznacz je $P_ż$, użyj *a* i *b*).

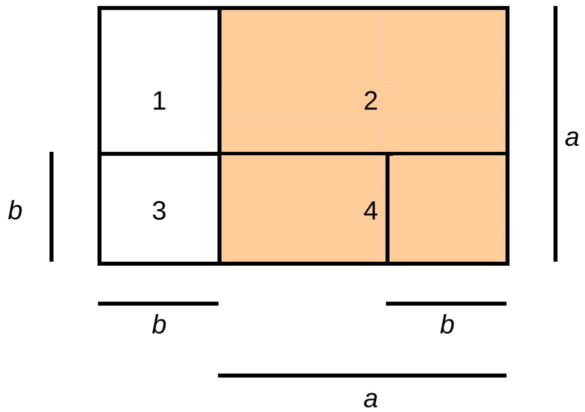
Co możesz powiedzieć o wielkościach $P_ż$ i P_1+P_2 ? Zapisz tę zależność.



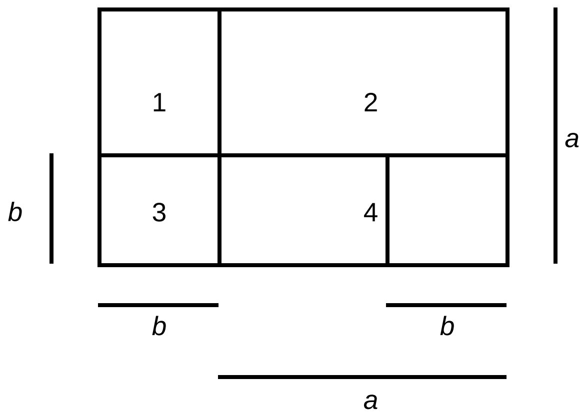
Z prostokąta oznaczonego 4, został wycięty jeszcze jeden prostokąt (różowy). Oblicz (możliwie najprościej) jego pole (oznacz je P_r).

Jaką figurą jest pozostała część prostokąta oznaczonego 4 (część niebieska)? Oblicz jej pole (oznacz je P_n).

(**) Czy któraś z rozważanych do tej pory figur miała takie samo pole?



Prostokąty 2 i 4 tworzą pewna figurę (pomarańczową). Co to za figura? Oblicz (możliwie najprościej) jej pole (oznacz je P_p)?



Na rysunku obok zaznacz figurę, która powstanie, gdy z figury pomarańczowej wytniemy figurę różową – jest to nasza figura „końcowa”.
(***) Korzystając ze sposobu jej powstania (opisanego powyżej) oblicz jej pole (oznacz je P_k).

Porównaj pola powstałej figury i figury żółtej. Co zauważasz?

Możesz skorzystać z poniższych pytań i poleceń pomocniczych.

1. Z jakich części dużego prostokąta da się złożyć figury żółtą i przez ciebie zaznaczoną?

2. Co możesz powiedzieć o figurach oznaczonych 1 i kolorem niebieskim? **(**)**

3. Co możesz powiedzieć o polach figur żółtej i przez ciebie zaznaczonej?

4. Porównaj pola figury żółtej i przez ciebie zaznaczonej, korzystając z **(*)** i **(***)**.
   Powstałą zależność wyraź używając wielkości *a* i *b*.

GRATULACJE!!!
Udowodniłeś jeden ze wzorów skróconego mnożenia.
Jaką sytuację uprości nam korzystanie z niego?

Jak widać (z załączonych materiałów), dostarczony uczniom tekst steruje ich pracą. Znajduje się tu sekwencja sześciu rysunków z krótkimi informacjami, co przy nich należy zrobić. Instrukcje są krótkie i … nie bardzo skomplikowane. Niemniej jednak, gdy uczniowie wykonają wszystkie polecenia i odpowiedzą na zasugerowane pytania, będą w stanie odkryć zależność dotyczącą różnicy kwadratów. Co więcej, przeprowadzą dowód tego faktu. Wydaje mi się, że nie jest ważnym to, że w podstawach programowych gimnazjum nie widnieją wzory skróconego mnożenia – jego udowodnienie jest jakby działalnością uboczną przeprowadzonego rozumowania. Dla mnie, w tym materiale ważne jest to, że pokazujemy uczniom powiązanie **geometrii** z **algebrą** oraz możemy oswajać pojęcia: *hipotezy*, *twierdzenia* i *dowodu*.
Co więcej, pracując z zaproponowanym tekstem realizujemy cele ogólne kształcenia w gimnazjum: „*uczeń interpretuje i tworzy teksty o charakterze matematycznym, używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników*” (I), „*używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi*” (II) oraz „ *prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania*” (V). I znowu, zdaję sobie sprawę z tego, że zaproponowany sposób jest trudniejszy i bardziej czasochłonny niż zrealizowanie tego samego metodą pogadanki, co więcej, że, by zakończyć realizację tego tematu, potrzebne są prezentacje uczniów oraz wspólne ich podsumowujące omówienie, ale chyba warto!

Trzecia propozycja dotyczyła szkoły średniej. Wybrałam temat z zakresu rachunku prawdopodobieństwa.
Cel – ćwiczenie umiejętności obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń.

Metoda – praca z materiałami przygotowanymi przez nauczyciela.

Forma – praca w grupach (parach) lub indywidualna (w zależności od możliwości uczniów).

Środki – przygotowany tekst z zadaniami oraz zestaw kostek.

Kostki

Dostałeś trzy zestawy kostek sześciennych wraz z zadaniami.

Rozwiąż zadania, a następnie zastanów się czy otrzymane kostki są do siebie podobne, czy nie

– odpowiedź uzasadnij.

1. **Do kostek z oczkami i cyframi.**

Rzucamy dwiema kostkami.

Oblicz prawdopodobieństwo, że zapisując otrzymane liczby jednocyfrowe obok siebie możemy otrzymać:

a) liczbę podzielną przez 3,

b) liczbę podzielną przez 5,

c) liczbę parzystą,

d) liczbę pierwszą.

2. **Do kostek z figurami karcianymi.**

Rzucamy dwiema kostkami.

Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) na obu kostkach wypadnie figura,

b) na obu kostkach pojawi się kolor czerwony,

c) na jednej będzie figura, a na drugiej czarny kolor,

d) na jednej z kostek jest as.

3. **Do kostek z ułamkami.**

Rzucamy dwiema kostkami.

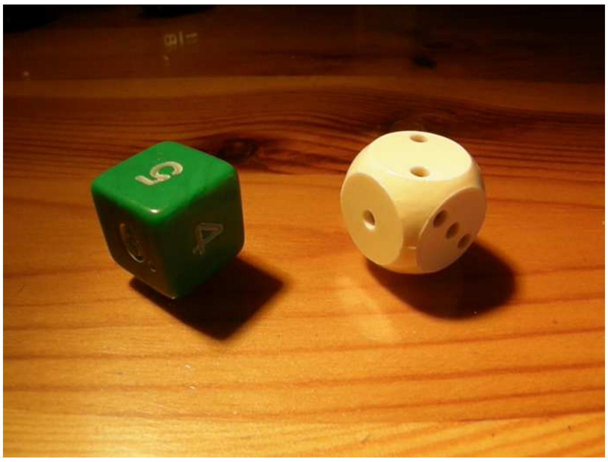
Oblicz prawdopodobieństwo tego, że mianowniki wyrzuconych ułamków:

a) są równe,

b) są liczbami względnie pierwszymi,

c) mają wspólny dzielnik większy od 1,

d) jeden z nich jest wielokrotnością drugiego.



Jak widać (z załączonych materiałów), tym razem jest to prawie typowa lista zadań, ale … prawie czyni różnicę. Tkwi ona w doborze kostek, których dotyczą poszczególne zadania. Dołączenie ich powoduje, że uczniowie sami muszą odkryć jak są one skonstruowane, dobrać odpowiedni model zbioru zdarzeń elementarnych, ustalić prawdopodobieństwo każdego z nich i … wykonać polecenia. Ale praca z przygotowanym materiałem nie ogranicza się tylko do samego rozwiązania poszczególnych zadań. Dzięki poleceniu umieszczonemu na początku, uczniowie mają dokonać porównania zbudowanych modeli.

I tu znowu, przy okazji realizowania konkretnego celu szczegółowego z podstaw programowych, realizujemy też cele ogólne: „*uczeń interpretuje tekst matematyczny, po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik*” (I), „*używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych*” (II), „*dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu*” (III) oraz „*prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków*” (V). I ponownie, zdaję sobie sprawę z tego, że zaproponowany sposób jest trudniejszy i bardziej czasochłonny niż zrealizowanie tego samego metodą pogadanki, co więcej, że by zakończyć realizację tego tematu potrzebne są prezentacje uczniów oraz wspólne ich podsumowujące omówienie, ale chyba warto!

Mam nadzieję, że przedstawione przeze mnie materiały zachęcą Państwa i w pewien sposób zainspirują do używania różnorodnych form pracy z tekstem. Poprzez różnorodność etapów edukacyjnych (szkoła podstawowa, gimnazjum i szkoły ponadgimnazjalne), jak i sytuacji ich użycia (wprowadzenie nowego materiału, ćwiczenie już poznanego czy łączenie różnych dziedzin matematyki) chciałam pokazać, że choć wymaga to od nas dużego wysiłku **można** i **warto,** a uwzględniając podstawy programowe **trzeba** pracować z uczniami używając tekstu matematycznego, a praca ta może być ciekawa i …twórcza dla uczniów i …dla nas!

Agata Hoffmann
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego